

脉冲噪声下基于稀疏表示的 韧性 DOA 估计方法

王 鹏^{1,2}, 邱天爽¹, 金芳晓¹, 夏 楠³, 李景春³

(1. 大连理工大学电子信息与电气工程学部, 辽宁大连 116024;

2. 中国电子科技集团公司第五十四研究所, 河北石家庄 050081; 3. 国家无线电监测中心, 北京 100037)

摘 要: 受相关熵启发, 本文提出了一种脉冲噪声下基于稀疏表示的韧性 DOA 估计新方法. 为实现多测量向量下联合稀疏信号的重建, 本文提出了一种基于归一化迭代硬阈值的优化算法, 讨论了最优步长的选择问题, 证明了优化算法的收敛性. 仿真结果表明: 本文算法能够实现脉冲噪声下多信源的 DOA 估计, 具有比已有算法更高的可分辨概率和估计精度.

关键词: 波达方向估计; 脉冲噪声; 稀疏表示; 相关熵

中图分类号: TN911.7 **文献标识码:** A **文章编号:** 0372-2112 (2018)07-1537-08

电子学报 URL: <http://www.ejournal.org.cn> **DOI:** 10.3969/j.issn.0372-2112.2018.07.001

A Robust DOA Estimation Method Based on Sparse Representation for Impulsive Noise Environments

WANG Peng^{1,2}, QIU Tian-shuang¹, JIN Fang-xiao¹, XIA Nan³, LI Jing-chun³

(1. Faculty of Electronic Information and Electrical Engineering, Dalian University of Technology, Dalian, Liaoning 116024, China;

2. The 54th Research Institute of China Electronics Technology Group Corporation, Shijiazhuang, Hebei 050081, China;

3. State Radio Monitoring Center, Beijing 100037, China)

Abstract: Inspired by the correntropy, a robust DOA (direction-of-arrival) method based on sparse representation for impulsive noise was proposed. To recover the joint-sparse signal from multiple measurement vectors, a normalized iterative hard thresholding based optimization algorithm was designed. The optimal step size of the algorithm was discussed and the convergence was proved. The simulation results demonstrate that the proposed method could realize the DOA estimation for multiple sources, and it is superior to existing methods in terms of success rate and estimation accuracy.

Key words: DOA estimation; impulsive noise; sparse representation; correntropy

1 引言

波达方向 (Direction-Of-Arrival, DOA) 估计广泛应用于雷达、声呐以及无线电通信等多个领域^[1]. 以 MUSIC 算法为代表的子空间技术实现了目标 DOA 的超分辨估计, 但该方法对接收数据的快拍数有较高的要求, 而且实现相干信源的 DOA 估计时需要进行平滑处理, 这会引起阵列孔径的损失, 进而导致分辨性能的下落.

近年来, 基于稀疏表示的 DOA 估计技术^[2-11]可以很好地克服以上问题. 基于稀疏表示的 DOA 估计是多

测量向量下的联合稀疏信号恢复问题, 也称为 MMV (Multiple Measurement Vectors) 问题. 文献[2]最早将稀疏表示理论引入 DOA 估计问题, 通过空间角度的离散化建立稀疏信号模型, 提出了 l_1 -SVD 方法. 文献[3]将传统的 FOCUSS (Focal Underdetermined System Solver) 方法推广至 MMV 问题, 提出了可用于 DOA 估计的 M-FOCUSS 方法. 文献[4]则将匹配追踪方法进行推广提出了 MSMPDOA (Multiple Snapshots Matching Pursuit Direction Of Arrival) 方法. 文献[5]利用高斯函数近似 $l_{2,0}$ 范数, 提出了信源个数未知下的 JLZA-DOA (Joint l_0 Approximation DOA) 方法. 文献[6]通过建立阵列协方差

向量的稀疏化模型提出了一种新的 DOA 估计方法,在低信噪比条件下取得了较好的估计结果.虽然以上算法在高斯噪声环境下取得了较好的效果,然而由于受到自然因素或人为因素的影响,噪声有可能呈现脉冲特性,受脉冲噪声中野点的影响,上述算法性能显著下降.

为实现脉冲噪声的抑制,受相关熵启发,本文提出了一种基于稀疏表示的 DOA 估计新方法,给出了一种基于迭代硬阈值的优化算法,并从理论上证明了算法的收敛性.仿真结果表明本文算法能够实现脉冲噪声下多信源 DOA 的高精度估计.

2 相关熵与稳定分布随机过程

2.1 相关熵

相关熵作为一种广义的相似性度量,可以有效抑制野点,广泛应用于非高斯噪声环境下的信号处理问题中^[12-16].对于随机变量 X 和 Y ,相关熵定义如下^[17]

$$V_{\sigma}(X, Y) = E[\kappa_{\sigma}(X - Y)] \quad (1)$$

$$\kappa_{\sigma}(\cdot) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp(-(\cdot)^2/2\sigma^2) \quad (2)$$

其中, $\kappa_{\sigma}(\cdot)$ 是核函数, σ 是核长, $E[\cdot]$ 表示数学期望.在实际应用中,由于概率密度函数未知,可利用时间平均对统计平均进行估计.假设一组观测值 $\{(x_i, y_i)\}_{i=1}^N$, 则相关熵的估计如下所示:

$$\hat{V}_{\sigma}(X, Y) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \kappa_{\sigma}(x_i - y_i) \quad (3)$$

对于两个随机变量 X 和 Y ,令 $E = X - Y$,则高斯信号处理中常用的均方误差 (Mean Square Error, MSE) 定义为

$$\text{MSE}(X, Y) = E[(X - Y)^2] = \int_e e^2 f_E(e) de \quad (4)$$

而相关熵定义为

$$V_{\sigma}(X, Y) = E[\kappa_{\sigma}(X - Y)] = \int_e \kappa(e) f_E(e) de \quad (5)$$

对比两式可以发现,虽然 MSE 和相关熵都是关于相似度的测量,然而两者实现相似度测量的方式并不相同,具体表现为 MSE 的全局性和相关熵的局部性. MSE 的全局性体现在空间内的所有样本都对相似性度量结果有明显的影 响,而相关熵的局部性则体现在只有受核函数约束的样本对相似性度量结果有明显的影 响.另一方面, MSE 是关于误差的二次函数,这就意味着误差中的野点对 MSE 的结果具有放大的作用,而相关熵则得益于核函数的约束,能够抑制野点的影响.因此,相比于 MSE,相关熵更加适用于非高斯信号处理.基于以上分析,文献^[17]提出了最大相关熵准则,文献^[12]则证明了 Alpha 稳定分布噪声下最大相关熵准则与最小分散稀疏准则的等价性.

2.2 稳定分布随机过程

研究表明,Alpha 稳定分布^[18]可以较好地描述脉冲噪声,其特征函数如下:

$$\varphi(t) = \exp\{j\mu t - \gamma|t|^{\alpha}[1 + j\beta\text{sign}(t)\omega(t, \alpha)]\} \quad (6)$$

式中,

$$\omega(t, \alpha) = \begin{cases} \tan \frac{\alpha\pi}{2}, & \alpha \neq 1 \\ \frac{2}{\pi} \log|t|, & \alpha = 1 \end{cases} \quad (7)$$

$$\text{sign}(t) = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ 0, & t = 0 \\ -1, & t < 0 \end{cases} \quad (8)$$

其中, $0 < \alpha \leq 2$ 称为特征指数,用来度量概率密度函数的拖尾厚度, $-1 < \beta < 1$ 是对称参数,用于表示分布的斜度, $\gamma > 0$ 为分散系数,用来度量样本的分散程度, $-\infty < \mu < +\infty$ 为位置参数,当 $0 < \alpha < 1$ 时表征该随机变量的中值,当 $1 < \alpha \leq 2$ 时表征该随机变量的均值.特别地,当 $\beta = 0$ 时,Alpha 稳定分布为对称 Alpha 稳定 (Symmetric Alpha Stable, SaS) 分布,当 $\alpha = 2$ 时, SaS 分布退化为高斯分布.

3 基于稀疏表示的韧性 DOA 估计新方法

3.1 问题描述

考虑 P 个窄带信源入射由 M 个阵元组成的均匀等距线阵,阵元间距为 d ,入射角度分别为 $\theta_1, \dots, \theta_P$,以第一个阵元为参考阵元,则第 m 个阵元 t 时刻的输出可以表示为:

$$y_m(t) = \sum_{i=1}^P s_i(t) e^{j2\pi\sin\theta_i(m-1)d/\lambda} + n_m(t) \quad (9)$$

式中, $s_i(t)$ 为第 i 个信源的复包络, λ 表示信号波长,且满足 $d \leq \lambda/2$, $n_m(t)$ 表示服从 SaS 分布的噪声.进一步将式(9)写成矢量形式,则有

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{A}\mathbf{s}(t) + \mathbf{n}(t) \quad (10)$$

其中, $\mathbf{y}(t) = [y_1(t), \dots, y_M(t)]^T$, $\mathbf{s}(t) = [s_1(t), \dots, s_P(t)]^T$ 和 $\mathbf{n}(t) = [n_1(t), \dots, n_M(t)]^T$, $[\cdot]^T$ 表示转置, $\mathbf{A} = [\mathbf{a}(\theta_1), \dots, \mathbf{a}(\theta_P)]$ 为阵列流形, $\mathbf{a}(\theta_i)$ 为方向矢量,表达式如下:

$$\mathbf{a}(\theta_i) = [1, \dots, e^{j2\pi\sin\theta_i(m-1)d/\lambda}, \dots, e^{j2\pi\sin\theta_i(M-1)d/\lambda}]^T \quad (11)$$

采用文献^[2]中的稀疏化模型,将空间等角度划分为 $\{\bar{\theta}_1, \dots, \bar{\theta}_Q\}$,且满足 $Q \gg P$,式(10)可进一步写成:

$$\mathbf{y}(t) = \Phi\mathbf{x}(t) + \mathbf{n}(t) \quad (12)$$

其中, $\Phi = [\mathbf{a}(\bar{\theta}_1), \dots, \mathbf{a}(\bar{\theta}_Q)]^T$, $\mathbf{x}(t) = [x_1(t), \dots, x_Q(t)]^T$.对比式(10)和式(12)可以发现,只有满足 $\bar{\theta}_k = \theta_i$ 时, $x_k(t) = s_i(t) \neq 0$,又由于 $Q \gg P$,因此 $\mathbf{x}(t)$ 是稀疏的.这就意味着利用观测数据 $\mathbf{y}(t)$ 重建得到稀疏

信号 $\mathbf{x}(t)$, 就可以实现信源的 DOA 估计. 单快拍下基于稀疏表示的 DOA 估计算法可分辨信源数目少且易受噪声影响, 所以多快拍下基于稀疏表示的 DOA 估计方法受到关注, 此时式可以写为:

$$\mathbf{Y} = \Phi \mathbf{X} + \mathbf{N} \quad (13)$$

其中, $\mathbf{Y} = [\mathbf{y}(1), \dots, \mathbf{y}(N)]$, $\mathbf{X} = [\mathbf{x}(1), \dots, \mathbf{x}(N)]$, $\mathbf{N} = [\mathbf{n}(1), \dots, \mathbf{n}(N)]$, N 表示快拍数. 可以发现, 在 DOA 估计问题中, $\mathbf{x}(1), \dots, \mathbf{x}(N)$ 具有相同的稀疏结构. 我们的目标就是利用接收数据矩阵 \mathbf{Y} 实现信源角度 $\theta_1, \dots, \theta_p$ 的估计.

3.2 脉冲噪声下单快拍信号的重建

脉冲噪声下单快拍信号可以通过求解如下的优化问题进行重建

$$\begin{aligned} \max_{\mathbf{x}} \hat{V}_{\sigma}(\mathbf{y}, \Phi \mathbf{x}) \\ \text{s. t. } \|\mathbf{x}\|_0 \leq P \end{aligned} \quad (14)$$

其中, $\|\mathbf{x}\|_0$ 为 0 范数, 表示向量中非零元素的个数. 为实现上述优化问题的求解, 本文对归一化迭代硬阈值方法 (NIHT)^[19] 进行了改进. 假设第 k 次迭代结果为 $\mathbf{x}^{(k)}$, 则第 $k+1$ 次迭代可以表示为

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = H_p(\mathbf{x}^{(k)} + \mu \mathbf{g}^{(k)}) \quad (15)$$

其中, $H_p(\mathbf{x})$ 表示仅保留向量 \mathbf{x} 中的 P 个最大峰值而其它位置置零的非线性操作, μ 是迭代步长, \mathbf{g} 表示梯度, 表达式如下:

$$\mathbf{g} = \Phi^H \mathbf{W}(\mathbf{y} - \Phi \mathbf{x}) \quad (16)$$

其中, $[\cdot]^H$ 表示共轭转置, \mathbf{W} 是一个对角矩阵, 采用高斯核函数时其对角元素如下所示:

$$w_{i,i} = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}\sigma^3} \exp\left(-\frac{|y_i - \Phi_{(i)} \mathbf{x}|^2}{2\sigma^2}\right) \quad (17)$$

其中, $\Phi_{(i)}$ 表示矩阵 Φ 的第 i 行, y_i 表示向量 \mathbf{y} 的第 i 个元素. 与 NIHT 相比, 本文所提算法的梯度项含有加权矩阵 \mathbf{W} 以实现脉冲噪声的抑制. 图 1 给出了加权因子的曲线, 可以看出, 当数值较大时, 加权因子迅速趋于 0, 可以有效抑制脉冲噪声中的野点.

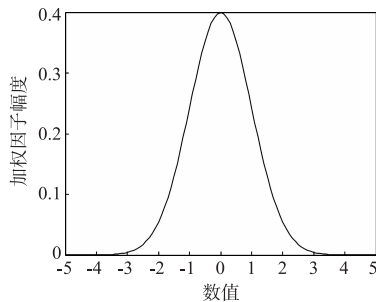


图1 核长为1时的加权因子

为了提高算法性能, 通过如下次优化问题^[20] 实现最优迭代步长的选择, 如式 (18) 所示:

$$\begin{aligned} \mu^{(k)} &= \min_{\mu} \|\mathbf{W}^{1/2} [\mathbf{y} - \Phi_S(\mathbf{x}_{(S)}^{(k)} + \mu \mathbf{g}_{(S)}^{(k)})]\|_2^2 \\ &= \frac{\|\mathbf{g}_{(S)}^{(k)}\|_2^2}{\|\mathbf{W}^{1/2} \Phi_S \mathbf{g}_{(S)}^{(k)}\|_2^2} \end{aligned} \quad (18)$$

其中, $S = \text{supp}(\mathbf{x}^{(k)})$ 表示该向量中非零元素位置索引的集合, Φ_S 表示保留索引属于集合 S 中的列, $\mathbf{x}_{(S)}$ 表示保留索引属于集合 S 中的行.

定理 1 假设 $f(x) = g(x^2)$ 并且 $g(x)$ 是个凸函数, 则对于任意的实数 a 和 b 有下式成立

$$f(a) - f(b) \geq \frac{f'(b)}{2b}(a^2 - b^2) \quad (19)$$

证明 对函数 $g(x)$ 在 x_0 处进行泰勒展开可得

$$g(x) = g(x_0) + g'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}g''(x_0)(x - x_0)^2 + o((x - x_0)^2) \quad (20)$$

因为 $g(x)$ 为凸函数, 所以 $g''(x_0) \geq 0$ 恒成立, 则有

$$g(x) \geq g(x_0) + g'(x_0)(x - x_0) \quad (21)$$

令 $x = a^2, x_0 = b^2$, 根据导数性质可得 $f'(x) = 2xg'(x^2)$, 式 (21) 可以进一步写为

$$f(a) - f(b) \geq \frac{f'(b)}{2b}(a^2 - b^2) \quad (22)$$

得证.

定理 2 令迭代步长为

$$\begin{aligned} \mu^{(k)} &= \|\mathbf{g}_{(S)}^{(k)}\|_2 / \|\mathbf{W}^{1/2} \Phi_S \mathbf{g}_{(S)}^{(k)}\|_2 \\ \mathbf{x}^{(k+1)} &= H_p(\mathbf{x}^{(k)} + \mu^{(k)} \mathbf{g}^{(k)}) \end{aligned}$$

如果满足 $S = \text{supp}(\mathbf{x}^{(k)}) = \text{supp}(\mathbf{x}^{(k+1)})$, 则有 $\hat{V}_{\sigma}(\mathbf{y}, \Phi \mathbf{x}^{(k+1)}) \geq \hat{V}_{\sigma}(\mathbf{y}, \Phi \mathbf{x}^{(k)})$ 成立.

证明 定义 $f(x)$ 和 $g(x)$ 如下

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \quad (23)$$

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{x}{2\sigma^2}} \quad (24)$$

容易发现, $f(x)$ 和 $g(x)$ 满足定理 1 中的条件. 定义第 k 次迭代的残差向量 $\mathbf{r}^{(k)} = \mathbf{y} - \Phi \mathbf{x}^{(k)}$, 根据定理 1 可以得到

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^M [f(r_i^{(k+1)}) - f(r_i^{(k)})] \\ &\geq \sum_{i=1}^M \frac{f'(r_i^{(k)})}{2r_i^{(k)}} [(r_i^{(k+1)})^2 - (r_i^{(k)})^2] \end{aligned} \quad (25)$$

其中, $r_i^{(k)}$ 是残差向量的 $\mathbf{r}^{(k)}$ 的第 i 个元素.

由 $f(x)$ 的定义可以得到其导数为

$$f'(x) = -\frac{x}{\sqrt{2\pi}\sigma^3} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \quad (26)$$

将式 (26) 代入式 (25), 根据式 (17) 可以得到:

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^M [f(r_i^{(k+1)}) - f(r_i^{(k)})] \\ & \geq \sum_{i=1}^M -\frac{1}{2\sqrt{2\pi}\sigma^3} e^{-\frac{(r_i^{(k)})^2}{2\sigma^2}} [(r_i^{(k+1)})^2 - (r_i^{(k)})^2] \\ & = \sum_{i=1}^M w_{i,i} [(r_i^{(k)})^2 - (r_i^{(k+1)})^2] \end{aligned} \quad (27)$$

根据相关熵以及向量 2 范数的定义,式(27)可以简写为:

$$\begin{aligned} & M[\hat{V}_\sigma(\mathbf{y}, \Phi\mathbf{x}^{(k+1)}) - \hat{V}_\sigma(\mathbf{y}, \Phi\mathbf{x}^{(k)})] \\ & \geq \| \mathbf{W}^{1/2}(\mathbf{y} - \Phi\mathbf{x}^{(k)}) \|_2^2 - \| \mathbf{W}^{1/2}(\mathbf{y} - \Phi\mathbf{x}^{(k+1)}) \|_2^2 \end{aligned} \quad (28)$$

如果 $S = \text{supp}(\mathbf{x}^{(k)}) = \text{supp}(\mathbf{x}^{(k+1)})$, $\mathbf{x}^{(k+1)} = H_p(\mathbf{x}^{(k)} + \boldsymbol{\mu}^{(k)} \mathbf{g}^{(k)})$, 则有下式成立

$$\mathbf{x}_{(S)}^{(k+1)} = \mathbf{x}_{(S)}^{(k)} + \boldsymbol{\mu}^{(k)} \mathbf{g}_{(S)}^{(k)} \quad (29)$$

即只有位置索引在集合 S 中的元素更新,其余为 0, 此时有 $\Phi_S \mathbf{x}_{(S)}^{(k)} = \Phi \mathbf{x}^{(k)}$. 由式(18)可知, $\| \mathbf{W}^{1/2}(\mathbf{y} - \Phi\mathbf{x}^{(k)}) \|_2^2 \geq \| \mathbf{W}^{1/2}(\mathbf{y} - \Phi\mathbf{x}^{(k+1)}) \|_2^2$, 所以

$$\hat{V}_\sigma(\mathbf{y}, \Phi\mathbf{x}^{(k+1)}) \geq \hat{V}_\sigma(\mathbf{y}, \Phi\mathbf{x}^{(k)}) \quad (30)$$

得证.

由定理 1 和定理 2 可以证明:当 $S = \text{supp}(\mathbf{x}^{(k)}) = \text{supp}(\mathbf{x}^{(k+1)})$ 时,采用式(18)所示的步长能够保证下式成立

$$\hat{V}_\sigma(\mathbf{y}, \Phi\mathbf{x}^{(k+1)}) \geq \hat{V}_\sigma(\mathbf{y}, \Phi\mathbf{x}^{(k)}) \quad (31)$$

若 $\text{supp}(\mathbf{x}^{(k)}) \neq \text{supp}(\mathbf{x}^{(k+1)})$ 时,式(18)所示的步长不一定是最优步长,此时若

$$\hat{V}_\sigma(\mathbf{y}, \Phi\mathbf{x}^{(k+1)}) < \hat{V}_\sigma(\mathbf{y}, \Phi\mathbf{x}^{(k)}) \quad (32)$$

则令 $\boldsymbol{\mu}^{(k)} \leftarrow \boldsymbol{\mu}^{(k)}/2$ 直到式(31)成立.

3.3 基于稀疏表示的韧性 DOA 估计

3.2 节给出了脉冲噪声下单快拍信号的重建方法,本节将其推广至多快拍下的信号重建问题:

$$\max_{\mathbf{X}} \hat{V}_\sigma(\mathbf{Y}, \Phi\mathbf{X}) \quad (33)$$

$$\text{s. t. } \| \mathbf{X} \|_{\ell_{2,0}} \leq P$$

其中, $\| \mathbf{X} \|_{\ell_{2,0}} = \| \mathbf{x}^{(\ell_2)} \|_0$, $\mathbf{x}^{(\ell_2)} = [x_1^{(\ell_2)}, \dots, x_Q^{(\ell_2)}]^T$, $\mathbf{x}_k^{(\ell_2)} = \| [x_k(1), x_k(2), \dots, x_k(N)] \|_2$, 即首先求 \mathbf{X} 每个行向量的 2 范数,组成新的向量 $\mathbf{x}^{(\ell_2)}$, 再对该向量求取 0 范数 $\| \mathbf{x}^{(\ell_2)} \|_0$, $\hat{V}_\sigma(\mathbf{Y}, \Phi\mathbf{X})$ 为相关熵的估计,定义如下:

$$\hat{V}_\sigma(\mathbf{Y}, \Phi\mathbf{X}) = \frac{1}{MN} \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M k_\sigma(y_{mn} - (\Phi\mathbf{X})_{mn}) \quad (34)$$

式中, M 为阵元数目, N 为快拍数, y_{mn} 和 $(\Phi\mathbf{X})_{mn}$ 分别表示 \mathbf{Y} 和 $\Phi\mathbf{X}$ 第 m 行 n 列的元素. 将式(34)代入式(33)并整理可以得到:

$$\frac{1}{MN} \max_{\mathbf{X}} \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M k_\sigma(y_{mn} - (\Phi\mathbf{X})_{mn})$$

$$\begin{aligned} & = \frac{1}{N} \max_{\mathbf{X}} \sum_{n=1}^N \hat{V}_\sigma(y_n, \Phi\mathbf{x}_n) \\ & \text{s. t. } \| \mathbf{X} \|_{\ell_{2,0}} \leq P \end{aligned} \quad (35)$$

式中, \mathbf{y}_n 与 \mathbf{x}_n 分别表示 \mathbf{Y} 和 \mathbf{X} 的第 n 列向量.

假设存在一个矩阵 $\mathbf{X}^* = [\mathbf{x}_1^*, \dots, \mathbf{x}_N^*]$, \mathbf{x}_n^* 满足式(36)

$$\begin{aligned} & \mathbf{x}_n^* = \arg \max_{\mathbf{x}_n} \hat{V}_\sigma(\mathbf{y}_n, \Phi\mathbf{x}_n) \\ & \text{s. t. } \| \mathbf{x}_n \|_0 \leq P, \quad \text{supp}(\mathbf{x}_n) = \text{supp}(\mathbf{X}) \end{aligned} \quad (36)$$

其中, $n = 1, 2, \dots, N$, $\text{supp}(\mathbf{x}_n)$ 表示 \mathbf{x}_n 中非零元素位置索引的集合, $\text{supp}(\mathbf{X})$ 则表示 $\mathbf{x}^{(\ell_2)}$ 中非零元素位置索引的集合. 结合式(35) 容易发现, \mathbf{X}^* 能使得式(33)中的代价函数取得最大值,即 \mathbf{X}^* 是式(33)的一种最优解. 因此,式(33)中的优化问题可以转化为 N 个式(36)所描述的子问题,这样就可以利用 3.2 节中的信号重构方法进行求解. 下面给出本文所提 DOA 估计方法的实现过程:

Step 1: 初始化矩阵 \mathbf{X} 为零矩阵,迭代次数 $k = 0$, 最大迭代次数 K , 迭代停止误差 ε_0 ;

Step 2: 对于第 k 次迭代,按式(16)计算梯度 $\mathbf{g}_n^{(k)}$, 得 $\boldsymbol{\mu}^{(k)} = \text{diag} \{ \mu_1^{(k)}, \dots, \mu_N^{(k)} \}$, 按式(18)计算迭代步长 $\mu_n^{(k)}$, 得 $\mathbf{G}^{(k)} = [\mathbf{g}_1^{(k)}, \dots, \mathbf{g}_N^{(k)}]$, 更新 \mathbf{X} 为 $\mathbf{X}^{(k+1)} = \mathbf{X}^{(k)} + \boldsymbol{\mu}^{(k)} \mathbf{G}^{(k)}$;

Step 3: 记录 $\mathbf{X}^{(k+1)}$ 中 P 个最大行向量 2 范数的位置索引,记作 S' , 保留 S' 所在行的元素,其余行元素置 0, 即 $\mathbf{X}^{(k+1)} = \mathbf{X}_{(S')}^{(k+1)}$;

Step 4: 若满足 $S' \neq S$ 且 $\hat{V}_\sigma(\mathbf{Y}, \Phi\mathbf{X}^{(k+1)}) < \hat{V}_\sigma(\mathbf{Y}, \Phi\mathbf{X}^{(k)})$, 则 $\boldsymbol{\mu}^{(k)} \leftarrow 0.5\boldsymbol{\mu}^{(k)}$, $\mathbf{X}^{(k)} = \mathbf{X}^{(k-1)} + \boldsymbol{\mu}^{(k)} \mathbf{G}^{(k)}$, 重复 Step3 直至 $\hat{V}_\sigma(\mathbf{Y}, \Phi\mathbf{X}^{(k+1)}) \geq \hat{V}_\sigma(\mathbf{Y}, \Phi\mathbf{X}^{(k)})$;

Step 5: 更新位置索引集合 $S = S'$, $\varepsilon^{(k)} = \frac{|\hat{V}_\sigma(\mathbf{Y}, \Phi\mathbf{X}^{(k+1)}) - \hat{V}_\sigma(\mathbf{Y}, \Phi\mathbf{X}^{(k)})|}{\hat{V}_\sigma(\mathbf{Y}, \Phi\mathbf{X}^{(k)})}$, 重复 Step3 ~ Step5 直至 $k > K$ 或 $\varepsilon^{(k)} < \varepsilon_0$;

Step 6: 根据位置索引集合 S 得到信源的 DOA.

定理 3 采用上述方法求解式(33)中的优化问题是收敛的.

证明 假设第 k 次迭代结果为 $\mathbf{X}^{(k)}$, 第 $k+1$ 次迭代结果为 $\mathbf{X}^{(k+1)}$, 根据以上所述存在

$$\hat{V}_\sigma(\mathbf{Y}, \Phi\mathbf{X}^{(k+1)}) \geq \hat{V}_\sigma(\mathbf{Y}, \Phi\mathbf{X}^{(k)}) \quad (37)$$

根据相关熵的有界性^[17]可知

$$0 < \hat{V}_\sigma(\mathbf{Y}, \Phi\mathbf{X}) \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \quad (38)$$

因此,该方法是收敛的.

4 仿真实验

为了验证算法的有效性,进行了仿真实验. 阵列天

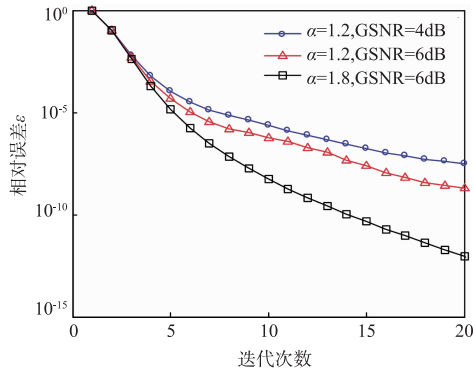
线的阵元数目 $M = 8$, 阵元间距为 $d = \lambda/2$, 稀疏化模型中设置空间角度范围为 $[-90^\circ, 90^\circ]$, 离散化间隔为 1° . 多个入射信号功率相等且为 1, 噪声服从 $S\alpha S$ 分布, 采用广义信噪比 (Generalized Signal-to-Noise Ratio, GSNR) 度量信号与噪声之间的强弱

$$\text{GSNR} = 10 \lg(E(|s(t)|^2)/\gamma) \quad (39)$$

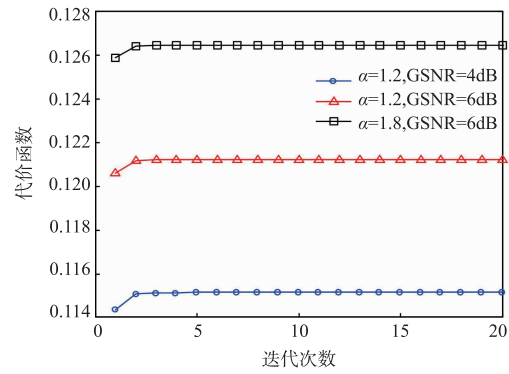
其中, $s(t)$ 表示信号, γ 为 $S\alpha S$ 分布噪声的分散系数.

本文采用两个统计量实现对算法性能的评价: DOA 可分辨概率和均方根误差 (Root Mean Square Error, RMSE). 当所有信源的 DOA 估计误差不超过阈值 T 时, 则认为两个信源是可分辨的, 本文设定阈值为 3° . 可分辨概率是可分辨次数与随机实验次数之比. RMSE 定义如下

$$\text{RMSE} = \frac{1}{P} \sum_{i=1}^P \sqrt{\frac{1}{L} (\hat{x}_i(l) - x_i)^2} \quad (40)$$



(a) 相对误差曲线

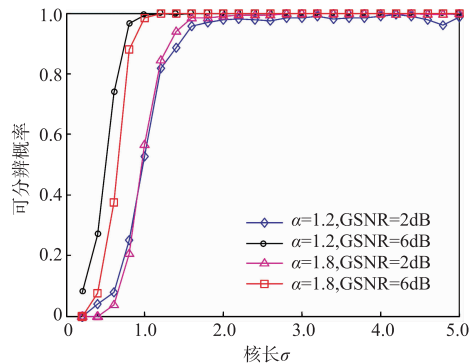


(b) 代价函数幅值曲线

图2 不同情况下的算法收敛曲线

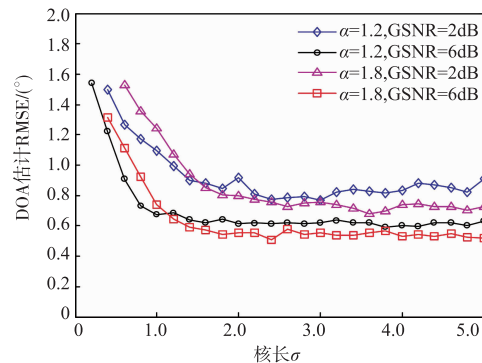
实验 2 核长参数选择. 图 3 给出了不同噪声环境下核长参数对算法结果的影响. 可以看出, 当满足 $\sigma \in [2.0, 4.0]$ 时, 本文算法取得较为理想的效果. 因此, 在后续仿真实验中, 核长参数均设定为 $\sigma = 3.0$.

实验 3 噪声特征指数与 GSNR 的影响. 图 4 给出了固定 $\text{GSNR} = 4\text{dB}$ 时不同噪声特征指数下的估计结果, 图 5 则给出了固定 $\alpha = 1.5$ 时不同 GSNR 下的估计



(a) 可分辨概率

结果. 其中, 快拍数 $N = 50$. 可以看出, 与 L1-SVD、MSMPDOA、JLZA-DOA 以及 SNIHT 等 4 种基于稀疏表示的 DOA 估计算法相比, 本文算法通过相关熵实现了脉冲噪声的抑制, 具有更高的可分辨概率和估计精度; 与 FLOM-MUSIC 算法相比, 本文算法不受脉冲噪声特征指数必须满足 $\alpha \geq 1$ 的限制, 能够较好地实现低信噪比高脉冲性噪声 ($\alpha < 1$) 下的 DOA 估计, 具有更广的适



(b) 估计均方根误差

图3 不同核长下的算法性能曲线

用性.

实验 4 快拍数的影响. 固定 $\alpha = 1.5$, $\text{GSNR} = 4\text{dB}$, 图 6 给出了不同快拍下的估计结果. 可以看出, 受脉冲噪声影响, 传统基于稀疏表示的 DOA 估计算法性能较差; 另一方面, 能够抑制脉冲噪声的 FLOM-MUSIC

算法则由于快拍数较少而效果较差, 这是因为该算法需要计算接收数据的协方差, 对快拍数有着较高的要求, 而 CM-NIHT 算法则保留基于稀疏表示 DOA 估计算法对快拍数要求低的特点, 并通过相关熵脉冲噪声, 取得了比其它算法更好的估计效果.

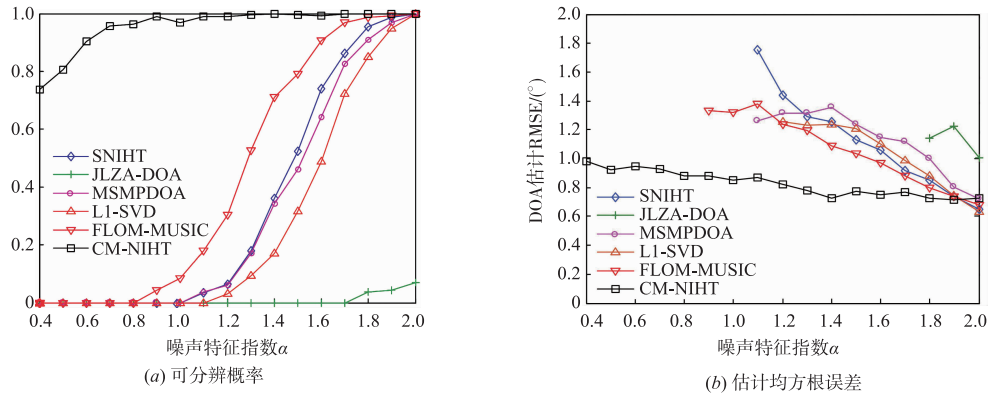


图4 不同噪声特征指数下的算法性能曲线

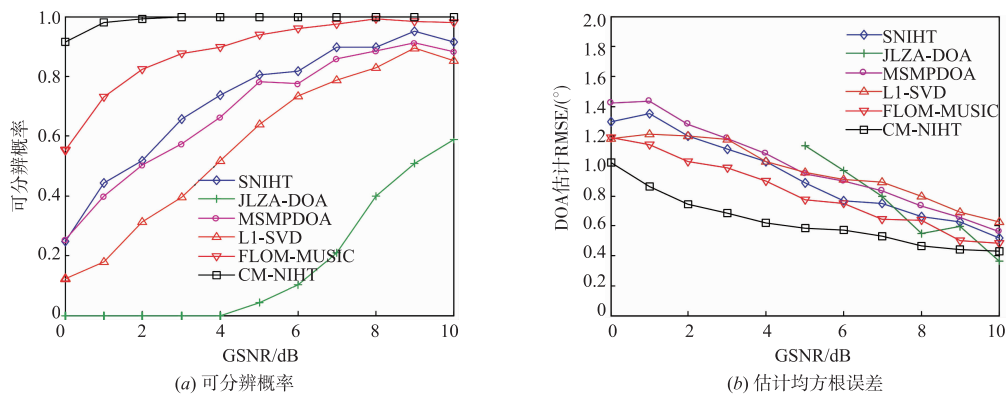


图5 不同GSNR下的算法性能曲线

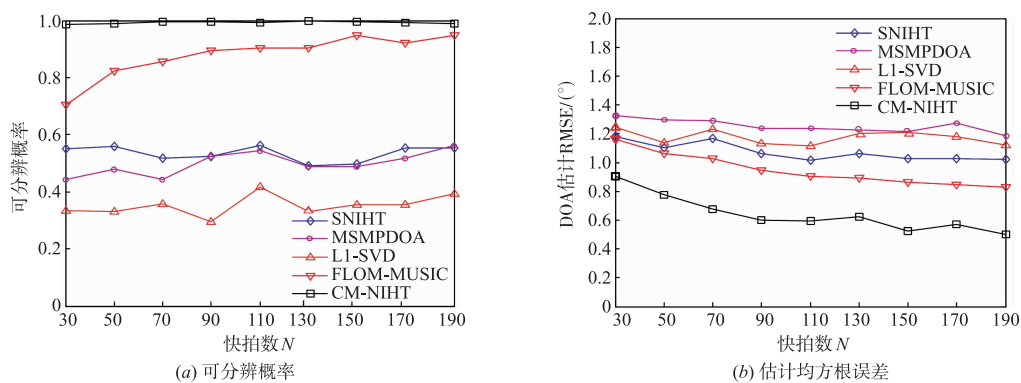


图6 不同快拍下的算法性能曲线

实验 5 多信源的 DOA 估计. 固定 $\alpha = 1.5$, $\text{GSNR} = 10\text{dB}$, 快拍数为 50. 图 7 给出了相干信源的 DOA 估计结果, 信源位置分别为 $\theta_1 = 10^\circ$, $\theta_2 = 30^\circ$ 和 $\theta_3 = 50^\circ$, 其中信源 1 和信源 3 为相干信源. 可以发现, 在信源个数已知的情况下, 文献[15]中基于相关熵的 MCC-MUSIC 以及文献[21]中基于分数低阶统计量的 FLOM-

MUSIC 无法实现相干信源的 DOA 估计, 而本文算法则可以实现所有信源 DOA 的高精度估计.

5 结论

本文提出了一种脉冲噪声下基于稀疏表示的 DOA 估计新方法, 为了实现优化问题的求解, 本文提出了一

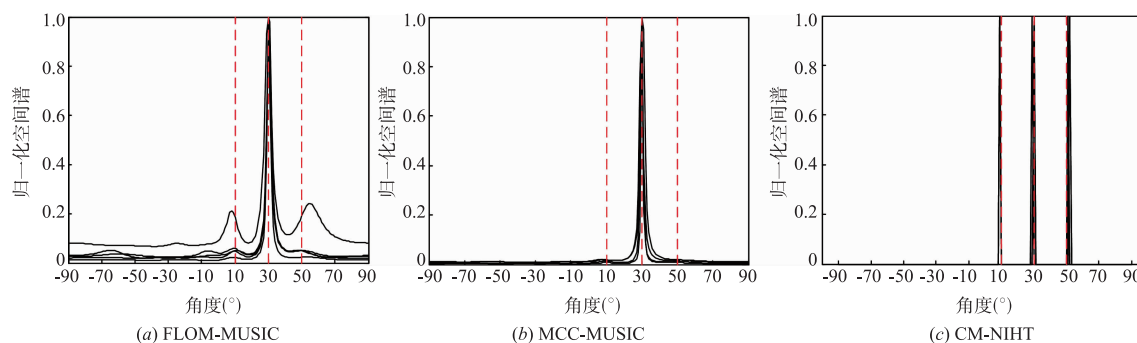


图7 相干信源估计的归一化空间谱图

种基于迭代硬阈值的优化算法,并从理论上证明了该算法的收敛性.与传统基于稀疏表示的 DOA 估计方法相比,本文算法具有更强的鲁棒性,既适用于高斯噪声环境也适用于脉冲噪声环境,且实现了相干信源的 DOA 估计.仿真实验证明了本文算法的有效性.

参考文献

- [1] KRIM H, VIVERRG M. Two decades of array signal processing research: the parametric approach [J]. *IEEE Signal Processing Magazine*, 1996, 13(4): 67–94.
- [2] MALIOUTOV D, CETIN M, WILLISKY A S. A sparse signal reconstruction perspective for source localization with sensor arrays [J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2005, 53(8): 3010–3022.
- [3] COTTER S F, RAO B D, ENGAN K, et al. Sparse solutions to linear inverse problems with multiple measurement vectors [J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2005, 53(7): 2477–2488.
- [4] COTTER S F. Multiple snapshot matching pursuit for direction of arrival (DOA) estimation [A]. *Proceedings of the 15th European Signal Processing Conference [C]*. USA: IEEE, 2007. 247–251.
- [5] HYDER M M, MAHATA K. Direction-of-arrival estimation using a mixed norm approximation [J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2010, 58(9): 4646–4655.
- [6] YIN J H, CHEN T Q. Direction-of-arrival estimation using a sparse representation of array covariance vectors [J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2011, 59(9): 4489–4493.
- [7] BLANCHARD J D, CERMAK M, HANLE D, et al. Greedy algorithms for joint sparse recovery [J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2014, 62(7): 1694–1704.
- [8] 吴小川, 邓维波, 杨强. 基于 CS-MUSIC 算法的 DOA 估计 [J]. *系统工程与电子技术*, 2013, 35(9): 1821–1824. WU Xiao-chuan, DENG Wei-bo, YANG Qiang. DOA estimation method based on CS-MUSIC algorithm [J]. *Systems Engineering and Electronics*, 2013, 35(9): 1821–1824. (in Chinese)
- [9] 林波, 张增辉, 朱炬波. 基于压缩感知的 DOA 估计稀疏化模型与性能分析 [J]. *电子与信息学报*, 2014, 36(3): 589–594. LIN Bo, ZHANG Zeng-hui, ZHU Ju-bo. Sparsity model and performance analysis of DOA estimation with compressive sensing [J]. *Journal of Electronics & Information Technology*, 2014, 36(3): 589–594. (in Chinese)
- [10] 田野, 练秋生, 徐鹤. 基于稀疏信号重构的 DOA 和极化角度估计算法 [J]. *电子学报*, 2016, 44(7): 1548–1554. TIAN Ye, LIAN Qiu-sheng, XU He. DOA and polarization angle estimation algorithm based on sparse signal reconstruction [J]. *Acta Electronica Sinica*, 2016, 44(7): 1548–1554. (in Chinese)
- [11] 王彪, 朱志慧, 戴跃伟. 基于具有时序结构的稀疏贝叶斯学习的水声目标 DOA 估计研究 [J]. *电子学报*, 2016, 44(3): 693–698. WANG Biao, ZHU Zhi-hui, DAI Yue-wei. Direction of arrival estimation research for underwater acoustic target based on sparse Bayesian learning with temporally correlated source vectors [J]. *Acta Electronica Sinica*, 2016, 44(3): 693–698. (in Chinese)
- [12] SONG A M, QIU T S. The equivalency of minimum error entropy criterion and minimum dispersion criterion for symmetric stable signal processing [J]. *IEEE Signal Processing Letters*, 2010, 17(1): 32–35.
- [13] 张金凤, 邱天爽, 李森. 冲激噪声环境下基于最大相关熵准则的韧性子空间跟踪新算法 [J]. *电子学报*, 2015, 43(3): 483–488. ZHANG Jin-feng, Qiu Tian-shuang, LI Sen. A robust PAST algorithm based on maximum correntropy criterion for impulsive noise environments [J]. *Acta Electronica Sinica*, 2015, 43(3): 483–488. (in Chinese)
- [14] YU L, QIU T S, LUAN S Y. Fractional time delay estimation algorithm based on the maximum correntropy criterion and the Lagrange FDF [J]. *Signal Processing*, 2015, 111: 222–229.

- [15] Zhang J F, QIU T S, SONG A M, et al. A novel correntropy based DOA estimation algorithm in impulsive noise environments [J]. Signal Processing, 2014, 104: 346 - 357.
- [16] CHEN B D, LEI X, LIANG J L, et al. Steady-state mean-square error analysis for adaptive filtering under the maximum correntropy criterion [J]. IEEE Signal Processing Letters, 2014, 21(7): 880 - 884.
- [17] LIU W F, POKHAREL P P, PRINCIPE J C. Correntropy: properties and applications in non-Gaussian signal processing [J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2007, 55(11): 5286 - 5298.
- [18] SHAO M, NIKIAS C L. Signal processing with fractional lower order moments: stable processes and their applications [J]. Proceedings of the IEEE, 1993, 81(7): 986 - 1010.
- [19] BLUMENSATH T, DAVIES M E. Normalized iterative hard thresholding: guaranteed stability and performance [J]. IEEE Journal of Selected Topics in Signal Processing, 2010, 4(2): 298 - 309.
- [20] CARRILLO R E, BARNER K E. Lorentzian iterative hard thresholding: robust compressed sensing with prior information [J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2013, 61(19): 4822 - 4833.
- [21] LIU T H, MENDEL J M. A subspace-based direction finding algorithm using fractional lower order statistics [J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2001, 49(8): 1605 - 1613.

作者简介



王 鹏 男. 1989 年 1 月出生, 河北宁晋人. 2016 年毕业于大连理工大学, 获得博士学位. 现在中国电子科技集团公司第 54 研究所从事通信对抗、信号情报处理方面的研究工作.

E-mail: wangpeng.0706@163.com



邱天爽 (通信作者) 男. 1954 年 8 月生, 江苏海门人, 博士, 大连理工大学教授、博士生导师. 研究方向: 统计信号处理、射频与通信信号处理等.

E-mail: qitsh@dlut.edu.cn

金芳晓 女. 1990 年生, 辽宁沈阳人, 大连理工大学博士生. 研究方向: 阵列信号处理、非高斯信号处理.

夏 楠 男. 1983 年 5 月生, 山东牟平人, 博士, 现在国家无线电监测中心任职. 研究方向: 粒子滤波理论、无线电监测理论与应用.

李景春 男. 1966 年生, 河北宁晋人, 博士, 国家无线电监测中心副主任兼总工程师. 研究方向: 无线电监测理论与应用等.